ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1986

MATHEMATIQUES I

(2 pages dactylographiées)

TA

PREMIERE PARTIE

I.1. Soit ■ un entier positif au sens large et A un polynôme de degré m à coefficients réels.

a) $A^{(k)}$ désignant la dérivée k-ième de A (avec $A^{(0)} = A$),

on pose : $B = A + A' + \ldots + A^{(m)}$

Calculer $\frac{d}{dt}\left(e^{-t} B(t)\right)$.

b) Montrer que la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par $t \mapsto e^{-t} A(t)$ admet une primitive et une seule qui tend vers zéro lorsque t tend vers $+\infty$, et préciser cette primitive.

I.2. Etablir l'existence d'une suite unique de polynômes P_n à coefficients réels tels que les fonctions f_n définies par $f_n(t) = e^{-t} P_n(t)$ vérifient pour tout t réel les conditions suivantes :

$$f_0(t) = e^{-t}$$

$$f'_{n+1}(t) = -\frac{t}{2n+1} f_n(t) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

I.3. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les résultats suivants :

a) pour tout t réel, $P_{n+1}(t) - P'_{n+1}(t) = \frac{t}{2n+1} P_n(t)$ (1)

b) le degré de P_n est égal à n.

I.4. Déterminer les fonctions f_1, f_2, f_3. Etudier leurs variations et tracer sur un même graphique les courbes représentatives ; on précisera leurs positions relatives.

I.5. On pose, pour tout n entier strictement positif et pour tout t réel :

$$\Delta_n(t) = f_{n+1}(t) - f_n(t) - \frac{t^2}{(2n-1)(2n+1)} f_{n-1}(t).$$

a) Etablir, pour tout n entier ≥ 2 et tout t réel, la relation :

$$\Delta'_n(t) = -\frac{t}{2n+1} \Delta_{n-1}(t)$$

b) Quelle est la limite de $\Delta_n(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

c) En déduire que $\Delta_n(t)$ est nul pour tout n et pour tout t.

I.6. a) On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout t réel, $f_{2n}(t) > 0$. Montrer qu'alors f_{2n+1} s'annule pour une valeur et une seule, notée γ_n, de la variable, et que l'on a :

$$f_{2n+2}(t) > 0 \text{ pour tout } t.$$

b) Donner le tableau de variation de f_n en distinguant selon la parité de n. On précisera $f_n(0)$ et $f'_n(0)$.

c) Tracer sur une même figure les courbes représentatives des fonctions

$$f_{2n-1} \text{ et } f_{2n}.$$

d) Quel est le signe de γ_n ? Quel est celui de $\gamma_{n+1} - \gamma_n$?

DEUXIEME PARTIE

Les notations restant celles de la première partie, on pose :

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} t^k$$

Le but de cette partie est l'obtention de quelques résultats sur la limite de $P_n(t)$ pour t fixé et n tendant vers $+\infty$ et sur les coefficients $a_{k,n}$ (on ne cherchera pas l'écriture explicite générale de ces coefficients).

II.1. a) Etablir la formule, valable pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{t^2}{(2n-1)(2n+1)} P_{n-1}(t) \qquad (2)$$

b) Etablir, pour tout couple d'entiers (k,n) tels que $0 \leq k \leq n$: $a_{k,n} > 0$.

c) Déterminer, pour tout n, $a_{k,n}$ pour $k = 0$, $k = 1$, $k = n$.

d) A l'aide de la formule (1) établie au I.3., déterminer $a_{2,n}$.

II.2. a) Etablir la formule, pour $1 \leq k \leq n$:

$$a_{k,n+1} - (k+1) a_{k+1,n+1} = \frac{1}{2n+1} a_{k-1,n}$$

b) Etablir que, pour $0 \leq k \leq n$:

$$0 \leq a_{k,n} \leq \frac{1}{k!}$$

II.3. Soit t fixé positif.

a) Montrer que l'on a pour tout n :

$$0 \leq P_n(t) \leq P_{n+1}(t) \leq e^t$$

b) Montrer que les deux suites $n \mapsto P_n(t)$ et $n \mapsto P'_n(t)$ convergent vers une même limite, qu'on notera L(t).

II.4. On fixe encore $t \geq 0$.

a) Etablir pour tout $n \geq 0$, les inégalités :

$$0 \leq P''_n(t) \leq P'_n(t) \leq P_n(t)$$

b) Soit h un réel tel que $|h| \leq 1$ et $t + h \geq 0$. Etablir l'inégalité:

$$|P_n(t+h) - P_n(t) - h P'_n(t)| \leq h^2 e^{t+1}$$

c) Montrer que la fonction L est dérivable dans $\mathbb{R}_+$.

d) Etablir que, pour tout $t \geq 0$, $L(t) = e^t$.

II.5. Montrer, pour tout x réel, l'inégalité :

$$|e^x - P_n(x)| \leq e^{|x|} - P_n(|x|)$$

Qu'en déduire ?

II.6. Que dire, pour k entier fixé, de $\lim_{n \to +\infty} a_{k,n}$?

II.7. Quelle est la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite de terme général γ_n (définie en I.6.) ?

*****
***
*

TA